Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Министерство образования и науки Кыргызской Республики

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

Естественно-технический факультет

Кафедра механики им. Я.И. Рудаева

Фонд
оценочных средств

по дисциплине «**Уравнения математической физики**»

Направление подготовки
15.03.03 – РФ, 650500 – КР Прикладная механика
профиль Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг

Квалификация выпускника
бакалавр

2022

Фонд оценочных средств предназначен для контроля знаний обучающихся по направлению подготовки «Прикладная механика» по дисциплине «*Уравнения математической физики*».

Фонд оценочных средств рассмотрен и утвержден на заседании кафедры механики им. Я.И. Рудаева

протокол № 1 от 30.08.2022 г.

Заведующий кафедрой механики им. Я.И. Рудаева

_____ Комарцов Н.М.
подпись

Исполнители:

Профессор, д.ф.-м.н. _____ Рычков Б.А.
подпись

Доцент, к.ф.-м.н. _____ Комарцов Н.М.
подпись

СОГЛАСОВАНО:

Заместитель декана по учебной работе

_____ Комарцов Н.М.
подпись

Уравнения математической физики

Контрольные вопросы для проверки уровня обученности знать:

1. ЛДУ с ЧП первого порядка
2. Классификация ДУ с ЧП второго порядка с двумя независимыми переменными .
3. Приведение к каноническому виду ДУ с ЧП второго порядка с двумя независимыми переменными .
4. Постановка основных краевых задач для ДУ с ЧП второго порядка
5. Гиперболические уравнения. Уравнение поперечных колебаний струны
6. Решение задачи Коши для уравнения колебания бесконечной струны методом характеристик. Формула Даламбера
7. Физическая интерпретация решений волнового уравнения
8. Метод Фурье для уравнений свободных колебаний струны
9. Параболические уравнения. Уравнение теплопроводности в пространстве.
10. Начальные и краевые условия для уравнения теплопроводности в пространстве
11. Первая краевая задача. Теорема о максимуме и минимуме
12. Теплопроводность в стержне, концы которого теплоизолированы
13. Решение первой смешанной задачи методом разделения переменных. Функция источника
14. Уравнение диффузии
15. Эллиптические уравнения. Уравнение Лапласа. Постановка краевых задач
16. Уравнение Лапласа в цилиндрических и сферических координатах.
17. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге
18. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце
19. Уравнение Лапласа в прямоугольнике
20. Метод функции Грина для задачи Дирихле
21. Задача Неймана

Контрольные вопросы для проверки уровня обученности уметь, владеть:

Уравнения в частных производных и их классификация

Определить тип следующих уравнений:

$u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + +4u_{yy} + u_{zz} - 2xyu_x + +3xu = 0$.

$u_{xy} + u_{yz} + u_{xy} - 3x^2u_y + y\sin xu + xe^{-y} = 0$.

$5u_{xx} + u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 8u_{xz} - 4u_{yz} - u + yz^2\sin x = 0$.

$4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0$.

$2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yz} + 3u_x - u = 0$.

$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} - xu_x + yu_z = 0$.

Определить тип уравнения в точках M и N. Найти и построить параболическую линию уравнения. Указать область, в которой уравнение имеет гиперболический тип:

1. $\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1-y^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\ M(2,4),\ N\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right).$

2. $\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \left(1+y^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$

$M(0,1),\ N(2,0).$

3. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(y+1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ M(-5,1),\ N(1,0).$

4. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\ M(0,1),\ N(1,3).$

5. $(3-2x+y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ M(0,1),\ N(2,0).$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 4x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2}y\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ M(1,1),\ N(3,7).$

7. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{(y+1)}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ M(-2,1),\ N(0,0).$

8. $\cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sqrt{y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\ M(0,1),\ N\left(\dfrac{\pi}{3},0\right).$

Уравнения гиперболического типа

1. Решить в области $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, следующие задачи:

а) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = x^2, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = x, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = -x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \dfrac{x}{a}, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \dfrac{1}{x^2}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = x, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos^2 x; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \dfrac{\cos x}{a}, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x \cos x; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x, \\ u(x,0) = \sin x, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x + \cos x; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x^2, \\ u(x,0) = e^{-x}, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 4; \end{cases}$

з) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5xt, \\ u(x,0) = x, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin x; \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos x; \end{cases}$

к) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 81\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \cos 5x, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = e^{-3x}; \end{cases}$

2. Решить следующие задачи на полупрямой методом продолжений:

а) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x>0, t>0, \\ u(0,t) = 0, \quad t>0, \\ u(x,0) = f(x), \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), x>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x>0, t>0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad t>0, \\ u(x,0) = f(x), \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), x>0. \end{cases}$

3. Найти решения следующих смешанных задач:

а) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 1, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x, \\ u(0,t) = 0, \quad u\left(\dfrac{\pi}{4}, t\right) = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \sin x, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin\dfrac{2\pi}{l} x, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0; \end{cases}$

Уравнения параболического типа

1. Найти решения следующих задач для уравнений теплопроводности методом Фурье:

а)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = Ax, \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \dfrac{cx(l-x)}{l^2}, \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} x, 0 \le x \le \dfrac{l}{2}, \\ l - x, \dfrac{l}{2} \le x \le l, l > 0, \end{cases} \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x(l-x), \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0; \end{cases}$$

д)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x^2, \quad 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0; \end{cases}$$

2. Найти решение задач Коши для уравнения теплопроводности:

а) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, 0 \le x \le l, \\ 0, x < 0, x > l, l > 0; \end{cases} \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1, 0 \le x \le l, \\ \dfrac{1}{l}, -l \le x \le 0, \\ 0, x < -l, x > l, l > 0; \end{cases} \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} u_1, x_1 < 0, \\ u_2, x \ge 0; \end{cases} \end{cases}$$

г) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, -2 \le x < 0, \\ 1, 0 \le x \le 2, \\ 0, x < -2, x > 2; \end{cases} \end{cases}$$

д) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1 + x, -1 \le x < 0, \\ 1 - x, 0 \le x < 1, \\ 0, x < -1, x \ge 1; \end{cases} \end{cases}$$

Уравнения эллиптического типа

1. В круге $x^2 + y^2 = \rho^2 < R^2$ решить задачу Дирихле:

а) $$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad 0 < \rho < R, \\ u(x,y) = x + xy, \quad \rho = R; \end{cases}$$

б) $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad 0 < \rho < R, \\ u(x,y) = 2(x^2 + y), \quad \rho = R; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad 0 < \rho < R, \\ u(x,y) = 4y^3, \quad \rho = R; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad 0 < \rho < R, \\ u(x,y) = x^2 - 2y^2, \quad \rho = R; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad 0 < \rho < R, \\ u(x,y) = 4xy^2, \quad \rho = R; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \quad 0 < \rho < R, \\ u(x,y) = 3\dfrac{y^4}{R^4}, \quad \rho = R. \end{cases}$

2. Найти гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат функцию $u(x,y)$, принимающую на его границе значения $x^2 - x - y$.

3. Найти гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат функцию $u(x,y)$, принимающую на его границе значения $\dfrac{y^3}{R^3}$.

4. Найти гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат функцию $u(x,y)$, принимающую на его границе значения $\dfrac{x^3}{R^3}$.

5. Найти гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат функцию $u(x,y)$, принимающую на его границе значения $x^2 - y^2$.

Образцы контрольных работ

Контрольная работа №1

1. Найти функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 - x^2 + y^2,\ u(0, y) = -1;\ \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 1.$$

2. Определить тип уравнения в точках M и N. Найти и построить параболическую линию уравнения. Указать область, в которой уравнение имеет гиперболический тип:

$$(3 - 2x + y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ M(0,1),\ N(2,0).$$

3. Привести к каноническому виду ДУ:

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Контрольная работа №2

1. Решить методом Даламбера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = x^2, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1; \end{cases}$$

2. Решить методом Фурье

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = 1, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = 0; \end{cases}$$

Контрольная работа №3

1. Начальная температура тонкого однородного изолированного стержня длиной 6 м равна $u(x,0)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 3,\\ 6-x, & 3\le x\le 6. \end{cases}$ Концы его поддерживаются при нулевой температуре. Найти температуру стержня в момент времени $t>0$.

2 Для тонкого однородного изолированного стержня длиной l, ось которого совпадает с осью Ox, температура $u=u(x,t)$ его сечения с абсциссой x в момент времени t при отсутствии источников тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности $u'_t=a^2u''_{xx}$, где a – постоянная. Определить распределение температуры для любого момента времени t, если известно начальное распределение температуры $u(x,0)$ и начальные условия:

$$u'_t=u''_{xx},\ 0<x<2,\ t>0,\ u(x,0)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2, \end{cases}\quad u(0,t)=u(2,t)=0.$$

Контрольная работа №4

1. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\Delta u=0,\ 0<r\le 2,\quad u\big|_{r=2}=\varphi+2$$

2. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\Delta u=0,\ 0<r\le 4,$$

$$u\big|_{r=4}=2\sin^2\varphi+3\cos^3\varphi-\sin\varphi+5\cos\varphi$$